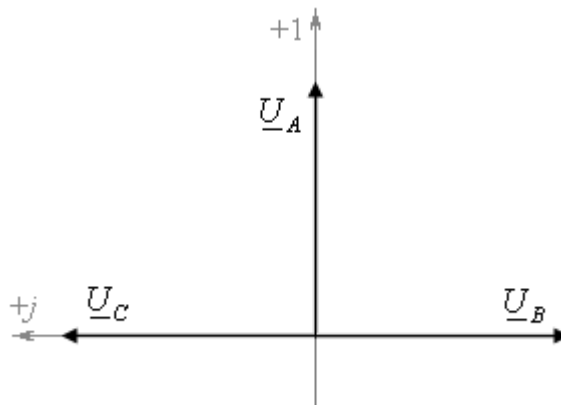


Семинар 3

Метод симметричных составляющих

Основой метода симметричных составляющих является аналитическое разложение заданной системы векторов напряжения или токов на симметричные составляющие прямой, обратной и нулевой последовательностей (преобразование Фортескью). Метод симметричных составляющих удобен для расчета несимметричных режимов трехфазных систем при динамической нагрузке. При этом сама трехфазная система (генераторы, трансформаторы, линии передачи) линейна и симметрична, а несимметрия возникает в результате разрыва или короткого замыкания отдельных элементов системы. Различают поперечную и продольную несимметрию. Расчет сводится к применению принципа наложения и составлению однофазных расчетных схем замещения. Решение дополняется граничными условиями (дополнительными уравнениями).

Задача 3.1. Фазные напряжения трехфазного генератора, обмотки которого соединены «звездой» $\underline{U}_A=100$ В, $\underline{U}_B=-j100$ В, $\underline{U}_C=j100$ В. Найти симметричные составляющие этой системы.



Решение. Определим напряжения прямой, обратной и нулевой последовательности фазы A .

1) Нулевая последовательность:

$$\underline{U}_{A0} = \frac{1}{3}(\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C) = \frac{1}{3}(100 + j100 - j100) = 33,3 \text{ В.}$$

2) Прямая последовательность:

$$\underline{U}_{A1} = \frac{1}{3}(\underline{U}_A + a\underline{U}_B + a^2\underline{U}_C) = \frac{1}{3}[100 + 100\angle 30^\circ + 100\angle -30^\circ] = 91 \text{ В.}$$

3) Обратная последовательность:

$$\underline{U}_{A2} = \frac{1}{3}(\underline{U}_A + a^2\underline{U}_B + a\underline{U}_C) = \frac{1}{3}[100 + 100\angle -210^\circ + 100\angle 210^\circ] = -24,4 \text{ В.}$$

Для фазы B :

$$\underline{U}_{B1} = a^2\underline{U}_{A1} = \underline{U}_{A1}\angle -120^\circ = 91\angle -120^\circ \text{ В, } \underline{U}_{B2} = a\underline{U}_{A2} = \underline{U}_{A2}\angle 120^\circ = 24,4\angle -60^\circ \text{ В, } \underline{U}_{B0} = \underline{U}_{A0} = 33,3 \text{ В.}$$

Для фазы C:

$$\underline{U}_{C1} = a\underline{U}_{A1} = \underline{U}_{A1} \angle 120^\circ = 91 \angle 120^\circ \text{ В}, \quad \underline{U}_{C2} = a^2\underline{U}_{A2} = \underline{U}_{A2} \angle -120^\circ = 24,4 \angle 60^\circ \text{ В},$$

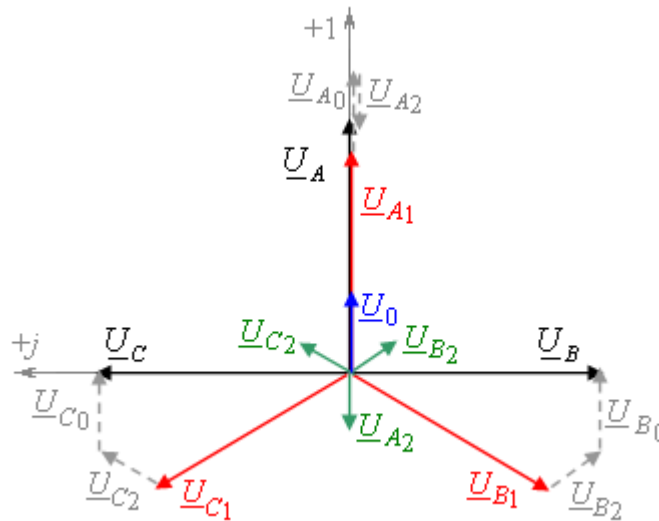
$$\underline{U}_{C0} = \underline{U}_{A0} = 33,3 \text{ В}.$$

Проверка: $\underline{U}_A = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_0 = 91 - 24,4 + 33,3 = 99,9 \approx 100 \text{ В},$

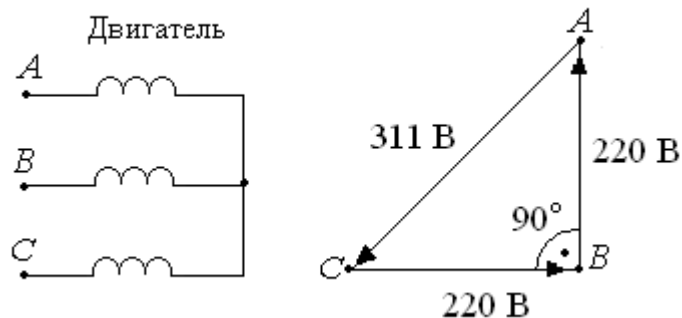
$$\underline{U}_B = a^2\underline{U}_1 + a\underline{U}_2 + \underline{U}_0 = 91 \angle -120^\circ + 91 \angle -60^\circ + 33,3 = 100 \angle -90^\circ \text{ В}.$$

$$\underline{U}_C = a\underline{U}_1 + a^2\underline{U}_2 + \underline{U}_0 = 91 \angle 120^\circ + 91 \angle 60^\circ + 33,3 = 100 \angle 90^\circ \text{ В}.$$

Векторная диаграмма:



Задача 3.2. К асинхронному двигателю приложено напряжение генератора с линейными напряжениями, представленными на векторной диаграмме. Сопротивления последовательностей двигателя $\underline{Z}_{дв1} = 2,82 + j 2,82 \text{ Ом}, \quad \underline{Z}_{дв2} = 1 + j 1,73 \text{ Ом}.$ Найти токи в фазах двигателя.



Решение:

Разложим несимметричную систему линейных напряжений по симметричным составляющим.

Пусть $\underline{U}_{AB} = 220 \angle 0^\circ \text{ В},$ тогда $\underline{U}_{BC} = 220 \angle -90^\circ \text{ В}, \quad \underline{U}_{CA} = 311 \angle 135^\circ \text{ В}.$

Нулевая последовательность $\underline{U}_0 = \frac{1}{3}(\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} + \underline{U}_{CA}) = 0$

Прямая последовательность

$$\underline{U}_1 = \frac{1}{3}(\underline{U}_{AB} + a\underline{U}_{BC} + a^2\underline{U}_{CA}) = \frac{1}{3}(220 + a220\angle -90^\circ + a^2 \cdot 311\angle 135^\circ) = 245,3\angle 15^\circ$$

В.

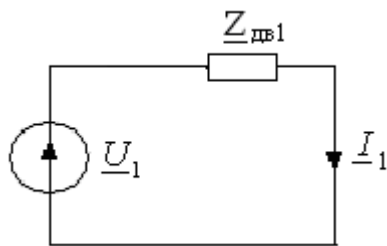
Обратная последовательность

$$\underline{U}_2 = \frac{1}{3}(\underline{U}_{AB} + a^2\underline{U}_{BC} + a\underline{U}_{CA}) = \frac{1}{3}(220 + a^2 220\angle 90^\circ + a \cdot 311\angle 135^\circ) = 65,7\angle -105^\circ$$

В.

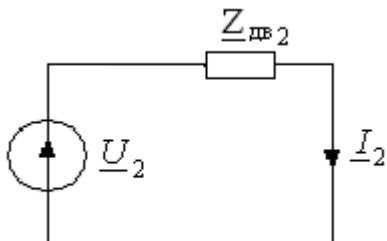
Токи двигателя найдем по методу наложения.

1) Прямая последовательность, фазное напряжение $\underline{U}_{1\phi} = \frac{U_1}{\sqrt{3}}\angle -30^\circ$



$$\underline{I}_{1дв} = \frac{\underline{U}_{1\phi}}{\underline{Z}_{дв1}} = \frac{245,3\angle 15^\circ - 30^\circ}{\sqrt{3}(2,82 + j2,82)} = 35,4\angle -60^\circ \text{ А}$$

2) Обратная последовательность, фазное напряжение $\underline{U}_{2\phi} = \frac{U_2}{\sqrt{3}}\angle 30^\circ$



$$\underline{I}_{2дв} = \frac{\underline{U}_{2\phi}}{\underline{Z}_{дв2}} = \frac{65,7\angle 105^\circ + 30^\circ}{\sqrt{3}(1 + j1,73)} = 18,9\angle -135^\circ \text{ А}$$

Токов нулевой последовательности нет.

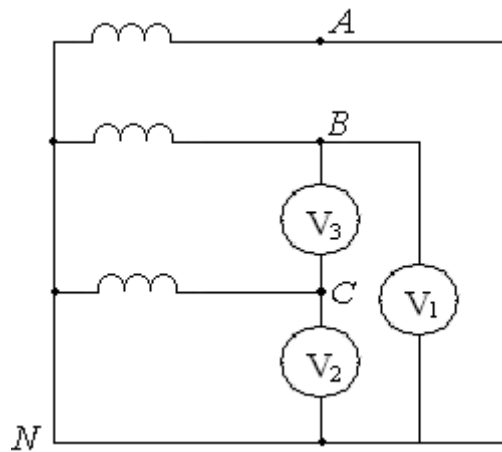
Токи в фазах двигателя:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{1дв} + \underline{I}_{2дв} = 35,4\angle -60^\circ + 18,9\angle -135^\circ = 44\angle -84,4^\circ \text{ А},$$

$$\underline{I}_B = a^2 \underline{I}_{1дв} + a \underline{I}_{2дв} = 35,4\angle -60^\circ \cdot 1\angle 240^\circ + 18,9\angle -135^\circ \cdot 1\angle 120^\circ = 17,82\angle -164,1^\circ \text{ А},$$

$$\underline{I}_C = a \underline{I}_{1дв} + a^2 \underline{I}_{2дв} = 35,4\angle -60^\circ \cdot 1\angle 120^\circ + 18,9\angle -135^\circ \cdot 1\angle 240^\circ = 50,54\angle 75,33^\circ \text{ А}.$$

Задача 3.3. Определить ток фазы А и показания вольтметров при однофазном коротком замыкании трехфазного генератора, если сопротивления генератора и ЭДС имеют значения: сопротивление прямой последовательности $\underline{Z}_{r1} = j12$ Ом, обратной $\underline{Z}_{r2} = j30$ Ом, нулевой $\underline{Z}_{r0} = j1$ Ом, фазная ЭДС $U_\phi = 160$ В.

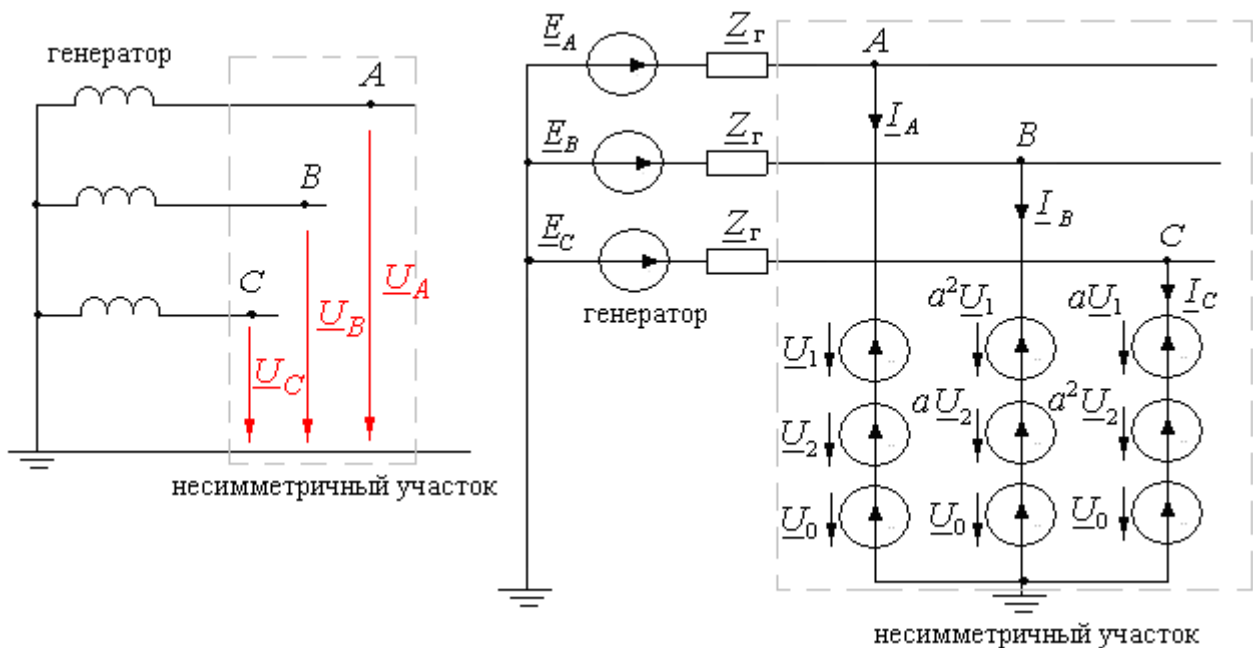


Решение: Поперечная несимметрия, напряжения \underline{U}_A , \underline{U}_B , \underline{U}_C представим суммой симметричных составляющих прямой, обратной и нулевой последовательностей:

$$\underline{U}_A = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_0$$

$$\underline{U}_B = a^2 \underline{U}_1 + a \underline{U}_2 + \underline{U}_0$$

$$\underline{U}_C = a \underline{U}_1 + a^2 \underline{U}_2 + \underline{U}_0$$



Здесь \underline{I}_A , \underline{I}_B , \underline{I}_C – токи несимметричного участка. С соответствием с принципом наложения:

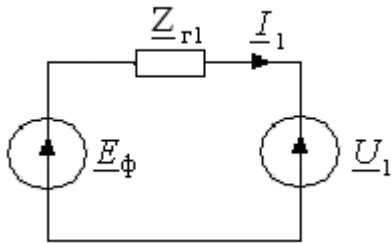
$$\underline{I}_A = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_0$$

$$\underline{I}_B = a^2 \underline{I}_1 + a \underline{I}_2 + \underline{I}_0$$

$$\underline{I}_C = a \underline{I}_1 + a^2 \underline{I}_2 + \underline{I}_0$$

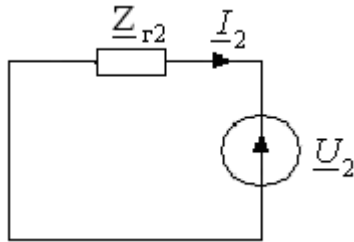
Составим однофазные схемы замещения:

1) Прямая последовательность, расчетная схема фазы А



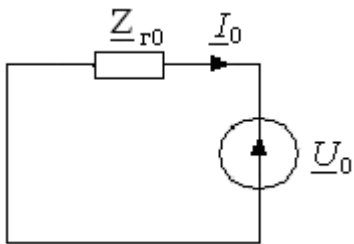
$$\underline{U}_1 = \underline{E}_\phi - \underline{Z}_{r1} \underline{I}_1 \quad (1)$$

схема фазы А



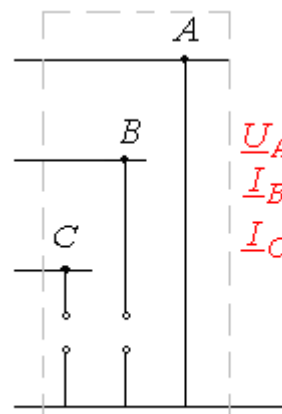
$$\underline{U}_2 = -\underline{Z}_{r2} \underline{I}_2 \quad (2)$$

3) Нулевая последовательность, расчетная схема фазы А



$$\underline{U}_0 = -\underline{Z}_{r0} \underline{I}_0 \quad (3)$$

Граничные условия (дополнительные уравнения):



несимметричный участок

$$\begin{aligned} \underline{U}_A &= 0 \\ \underline{I}_B &= 0 \\ \underline{I}_C &= 0 \end{aligned}$$

$$\underline{U}_A = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_0 = 0 \quad (4)$$

$$\underline{I}_B = a^2 \underline{I}_1 + a \underline{I}_2 + \underline{I}_0 = 0 \quad (5)$$

$$\underline{I}_C = a \underline{I}_1 + a^2 \underline{I}_2 + \underline{I}_0 = 0 \quad (6)$$

Подставляем уравнения последовательностей в граничные условия, получаем 3 уравнения

$$\begin{aligned} \underline{E}_\phi - \underline{Z}_{r1} \underline{I}_1 - \underline{Z}_{r2} \underline{I}_2 - \underline{Z}_{r0} \underline{I}_0 &= 0 \\ a^2 \underline{I}_1 + a \underline{I}_2 + \underline{I}_0 &= 0 \end{aligned}$$

$$a \underline{I}_1 + a^2 \underline{I}_2 + \underline{I}_0 = 0$$

Или

$$160 - j12\underline{I}_1 - j3\underline{I}_2 - \underline{Z}_{r0}\underline{I}_0 = 0$$

$$a^2 \underline{I}_1 + a \underline{I}_2 + \underline{I}_0 = 0$$

$$a \underline{I}_1 + a^2 \underline{I}_2 + \underline{I}_0 = 0$$

Решая эту систему относительно \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{I}_0 , \underline{U}_1 , \underline{U}_2 , \underline{U}_0 получаем,

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = -j10 \text{ A}, \quad \underline{I}_0 = -j10 \text{ A},$$

$$\underline{U}_1 = 40 \text{ В}, \quad \underline{U}_2 = -30 \text{ В}, \quad \underline{U}_0 = -10 \text{ В}.$$

Определим показания вольтметров:

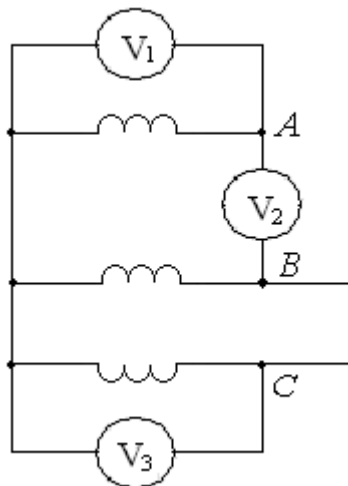
$$\underline{U}_{V1} = a^2 \underline{U}_1 + a \underline{U}_2 + \underline{U}_0 = \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) 40 + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (-30) - 10 = 62,5 \angle -104^\circ \text{ В},$$

$$\underline{U}_{V2} = a \underline{U}_1 + a^2 \underline{U}_2 + \underline{U}_0 = \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) 40 + \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (-30) - 10 = 62,5 \angle 104^\circ \text{ В},$$

$$\underline{U}_{V3} = \underline{U}_B - \underline{U}_C = \underline{U}_{V1} - \underline{U}_{V2} = 62,5 \angle -104^\circ - 62,5 \angle 104^\circ = -j70\sqrt{3} \text{ В}.$$

Следовательно, $U_{V1}=62,5 \text{ В}$, $U_{V2}=62,5 \text{ В}$, $U_{V3}=121,2 \text{ В}$.

Задача 3.4. Определить показания вольтметров и ток в фазе В при двухфазном коротком замыкании генератора. Сопротивления генератора: прямой последовательности $\underline{Z}_{r1} = j8 \text{ Ом}$, обратной $\underline{Z}_{r2} = j2 \text{ Ом}$, фазная ЭДС $U_\phi = 100 \text{ В}$.



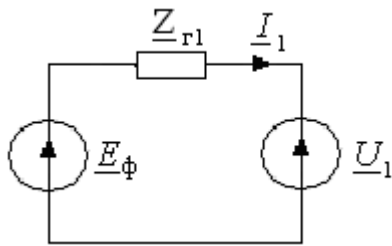
Решение: Метод симметричных составляющих, несимметричный участок с напряжениями \underline{U}_A , \underline{U}_B , \underline{U}_C представим суммой симметричных составляющих прямой, обратной и нулевой последовательностей и токами несимметричного участка \underline{I}_A , \underline{I}_B , \underline{I}_C :

$$\underline{U}_A = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_0 \quad \underline{I}_A = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_0$$

$$\underline{U}_B = a^2 \underline{U}_1 + a \underline{U}_2 + \underline{U}_0 \quad \underline{I}_B = a^2 \underline{I}_1 + a \underline{I}_2 + \underline{I}_0$$

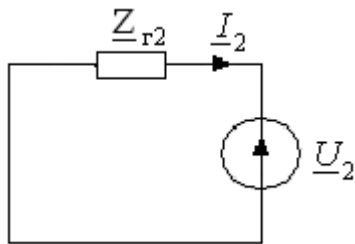
$$\underline{U}_C = a \underline{U}_1 + a^2 \underline{U}_2 + \underline{U}_0 \quad \underline{I}_C = a \underline{I}_1 + a^2 \underline{I}_2 + \underline{I}_0$$

1) Прямая последовательность, эквивалентная расчетная схема:



$$\underline{U}_1 = \underline{E}_\phi - \underline{Z}_{r1} \underline{I}_1 \quad (1)$$

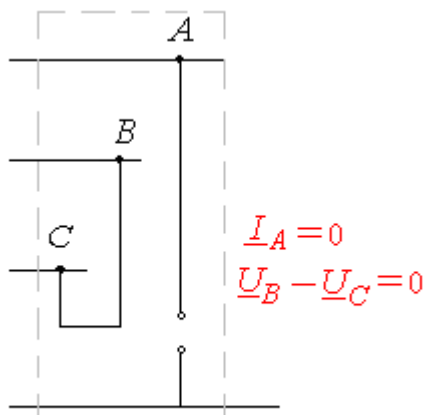
2) Обратная последовательность, эквивалентная расчетная схема:



$$\underline{U}_2 = -\underline{Z}_{r2} \underline{I}_2 \quad (2)$$

3) Нулевой последовательности тока нет (отсутствует нулевой провод):
 $\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 3\underline{I}_0 = 0$, следовательно, $\underline{I}_0 = 0$ (3)

Граничные условия (дополнительные уравнения):



несимметричный участок

$$\underline{I}_A = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 0 \quad (4)$$

$$\underline{I}_B = -\underline{I}_C \quad (5)$$

$$\underline{U}_B - \underline{U}_C = (a^2 - a)\underline{U}_1 + (a - a^2)\underline{U}_2 = 0 \quad (6)$$

Решаем систему из шести уравнений: из (4) и (6) $\underline{U}_1 = \underline{U}_2$; $\underline{I}_1 = -\underline{I}_2$,
из уравнений (1) (2) находим $\underline{I}_1 = j10 \text{ A}$, $\underline{I}_2 = j10 \text{ A}$, $\underline{U}_1 = \underline{U}_2 = 20 \text{ В}$.

Показания вольтметров:

$$\underline{U}_{V1} = \underline{U}_A = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = 20 + 20 = 40 \text{ В},$$

$$\underline{U}_{V2} = \underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B = 40 - [a^2 \underline{U}_1 + a \underline{U}_2] = 60 \text{ В},$$

$$\underline{U}_{V3} = \underline{U}_C = a \underline{U}_1 + a^2 \underline{U}_2 = \left(-\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) 20 + \left(-\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) 20 = -20 \text{ В}.$$

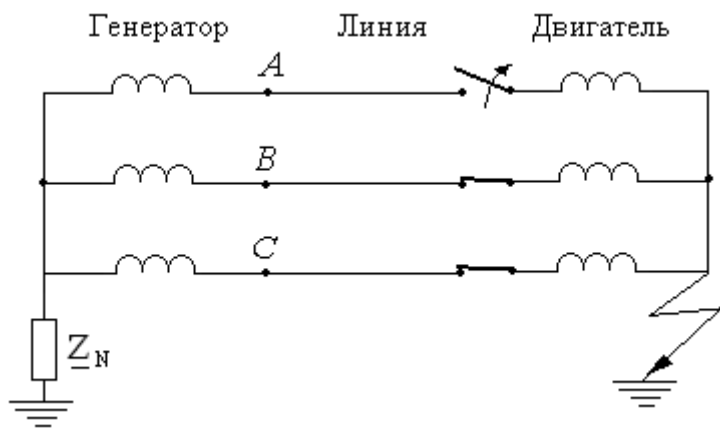
Следовательно, $U_{V1} = 40 \text{ В}$, $U_{V2} = 60 \text{ В}$, $U_{V3} = 20 \text{ В}$.

Задача 3.5. Трехфазный асинхронный двигатель получает питание от генератора по линии передачи. Вследствие неисправности пусковой аппаратуры произошло отключение фазы *A* и одновременно короткое замыкание нейтрали двигателя на землю. Определить напряжение на разомкнутых контактах и токи фаз *B* и *C*, если фазная ЭДС генератора

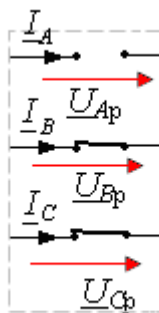
$E = 210 \text{ В}$, сопротивление последовательностей генератора $Z_{Г1} = j 3 \text{ Ом}$, $Z_{Г2} = j 1 \text{ Ом}$,

$Z_{Г0} = j 0,5 \text{ Ом}$; сопротивление последовательностей линии $Z_{Л1} = Z_{Л2} = j 0,5 \text{ Ом}$,

$Z_{Л0} = j 0,75 \text{ Ом}$; сопротивления последовательностей двигателя $Z_{ДВ1} = j 4 \text{ Ом}$, $Z_{ДВ2} = j 1 \text{ Ом}$, $Z_{ДВ0} = j 0,5 \text{ Ом}$; сопротивление $Z_N = j 0,25 \text{ Ом}$.



Решение: Пусть $\underline{U}_{Ap}, \underline{U}_{Bp}, \underline{U}_{Cp}$ – напряжения на рубильниках. Представим напряжения и токи в контактах пусковой аппаратуры симметричными составляющими $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_0, \underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_0$:



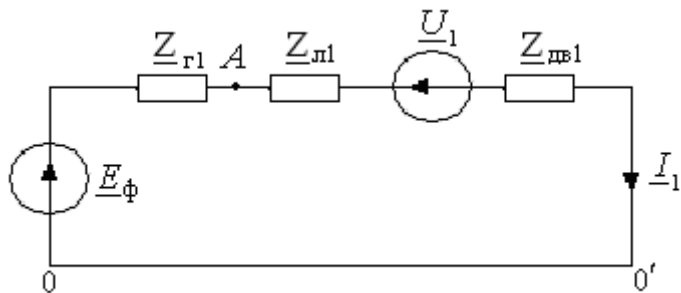
$$\underline{U}_{A\delta} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_0 \quad \underline{I}_A = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_0$$

$$\underline{U}_{B\delta} = a^2 \underline{U}_1 + a \underline{U}_2 + \underline{U}_0 \quad \underline{I}_B = a^2 \underline{I}_1 + a \underline{I}_2 + \underline{I}_0$$

$$\underline{U}_{C\delta} = a \underline{U}_1 + a^2 \underline{U}_2 + \underline{U}_0 \quad \underline{I}_C = a \underline{I}_1 + a^2 \underline{I}_2 + \underline{I}_0$$

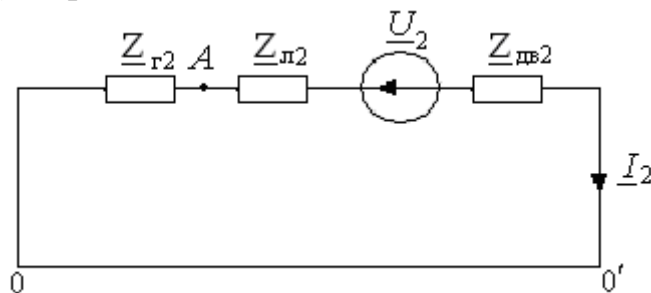
Составим эквивалентные схемы и уравнения для последовательностей (продольная несимметрия)

1) Прямая последовательность, эквивалентная расчетная схема:



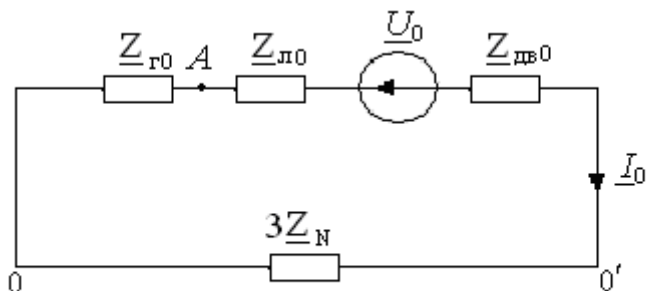
$$\underline{U}_1 = -(\underline{Z}_{r1} + \underline{Z}_{л1} + \underline{Z}_{дв1})\underline{I}_1 + E_\phi; \underline{U}_1 = -j7,5\underline{I}_1 + 210 \quad (1)$$

2) Обратная последовательность, эквивалентная расчетная схема:



$$\underline{U}_2 = -(\underline{Z}_{r2} + \underline{Z}_{л2} + \underline{Z}_{дв2})\underline{I}_2; \underline{U}_2 = -j2,5\underline{I}_2 \quad (2)$$

3) Нулевая последовательность, эквивалентная расчетная схема:



$$\underline{U}_0 = -j2,5\underline{I}_0 \quad (3)$$

Граничные условия (дополнительные уравнения)

$$\underline{I}_A = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_0 = 0, \quad (4)$$

$$\underline{U}_{Bp} = a^2\underline{U}_1 + a\underline{U}_2 + \underline{U}_0 = 0, \quad (5)$$

$$\underline{U}_{Cp} = a\underline{U}_1 + a^2\underline{U}_2 + \underline{U}_0 = 0. \quad (6)$$

Решая эту систему уравнений (1)-(6), получаем:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 = \underline{U}_0 = 30 \text{ В}, \underline{I}_0 = \underline{I}_2 = j12 \text{ А}, \underline{I}_1 = -j24 \text{ А}.$$

Токи:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_0 = 0$$

$$\underline{I}_B = a^2 \underline{I}_1 + a \underline{I}_2 + \underline{I}_0 = 36 \angle 150^\circ \text{ А}$$

$$\underline{I}_C = a \underline{I}_1 + a^2 \underline{I}_2 + \underline{I}_0 = 36 \angle 30^\circ \text{ А}$$

Ток короткого замыкания $\underline{I}_{кз} = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = j36 \text{ А}.$

Напряжение на рубильнике в фазе A: $\underline{U}_{Ap} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_0 = 90 \text{ В}.$