

Министерство науки и высшего образования РФ



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ



Кафедра ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ОСНОВ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

**Лабораторная работа №11:
по дисциплине «Теоретические основы электротехники»**

**«Исследование линейной электрической цепи
несинусоидального периодического тока»**

Студент:	
Группа:	
Преподаватель:	

Москва 2026

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью работы является исследование кривых напряжения и тока в линейных цепях с источником периодического несинусоидального напряжения. Проводится сравнение экспериментальных кривых несинусоидального напряжения на емкостном и резистивном элементе и кривых, построенных с использованием разложения в ряд Фурье. Проводится сравнение результатов измерений действующего значения несинусоидального напряжения, активной мощности цепи с теоретическим определением этих величин по гармоническому составу кривых и по дискретным значениям.

2. КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Несинусоидальный ток, несинусоидальное напряжение; ряд Фурье; мгновенное, среднее, действующее значения периодического тока, напряжения; мощность; гармоника; метод расчета; измерение; системы приборов; дискретные значения.

3. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Периодическое несинусоидальное напряжение источника питания, напряжения на элементах или ток в них могут быть представлены в виде суммы составляющих, получаемых на основе разложения в ряд Фурье в виде:

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \varphi_{uk}),$$

где U_0 – постоянная составляющая, равная среднему значению за период:

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt.$$

Амплитуда U_{km} и начальная фаза φ_{uk} k -й гармоники (гармонической составляющей) $u^{(k)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \varphi_{uk})$ определяются формулами Эйлера-Фурье. Частота первой (основной) гармоники определяется периодом несинусоидального напряжения $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

В работе используется источник $u(t)$, форма кривой напряжения которого представляет собой периодическую последовательность разнополярных импульсов в виде **меандра** (рис. 1).

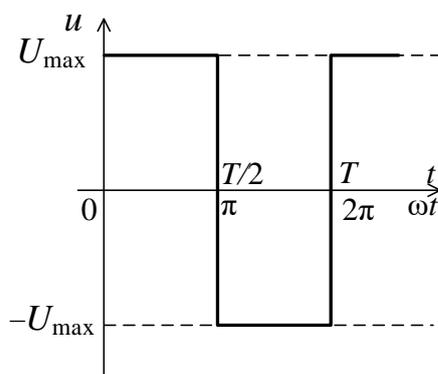


Рис. 1. Последовательность прямоугольных импульсов – меандр

Мгновенное значение меандра можно задать в аналитическом виде:

$$u(t) = \begin{cases} U_{\max}, & t \in \left(0, \frac{T}{2}\right) \\ -U_{\max}, & t \in \left(\frac{T}{2}, T\right) \end{cases},$$

где $\pm U_{\max}$ – максимальное¹ (минимальное) значение напряжения, T – период.

Меандр, представленный на рис. 1, относится к частному случаю периодических кривых, симметричных относительно оси абсцисс, поэтому раскладывается в ряд, который не содержит постоянной составляющей и четных гармоник. Кроме того, представленная кривая $u(t)$ симметрична относительно начала координат. Гармонические составляющие ряда в этом случае определяются синусными составляющими, то есть $\varphi_{uk} = 0$.

Примечание. При переносе начала отсчета для оси t начальные фазы гармонических составляющих $\varphi_{uk} \neq 0$; например, при сдвиге на четверть периода, разложение в ряд Фурье будет иметь косинусные составляющие.

Таким образом, разложение в ряд Фурье для меандра, представленного на рис. 1, имеет вид:

$$u(t) = \frac{4U_{\max}}{\pi} \left[\frac{\sin \omega t}{1} + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \dots + \frac{\sin k\omega t}{k} + \dots \right], \quad k = 1, 3, 5, \dots$$

Для гармонических составляющих амплитуда первой (основной) гармоники $U_{1m} = \frac{4U_{\max}}{\pi}$, амплитуда k -й гармоники $U_{km} = \frac{U_{1m}}{k} = \frac{4U_{\max}}{k\pi}$, $k = 1, 3, 5, \dots$

На рисунке 2 показаны графики основной $u^{(1)}$, третьей $u^{(3)}$, пятой $u^{(5)}$ и седьмой $u^{(7)}$ гармоник и сумма N гармонических составляющих разложения в ряд Фурье для аппроксимации меандра с $\pm U_{\max} = \pm 1$ В. Для k -й

¹ Следует обратить внимание, что в отношении максимального значения U_{\max} на рис. 1 термин «амплитуда» не применяется

гармоники период $T^{(k)} = \frac{2\pi}{k\omega} = \frac{T^{(1)}}{k}$. Следует отметить, что для разрывной функции суммирование даже «бесконечного» числа гармонических составляющих приведет к искажению формы в месте разрыва (явление Гиббса).

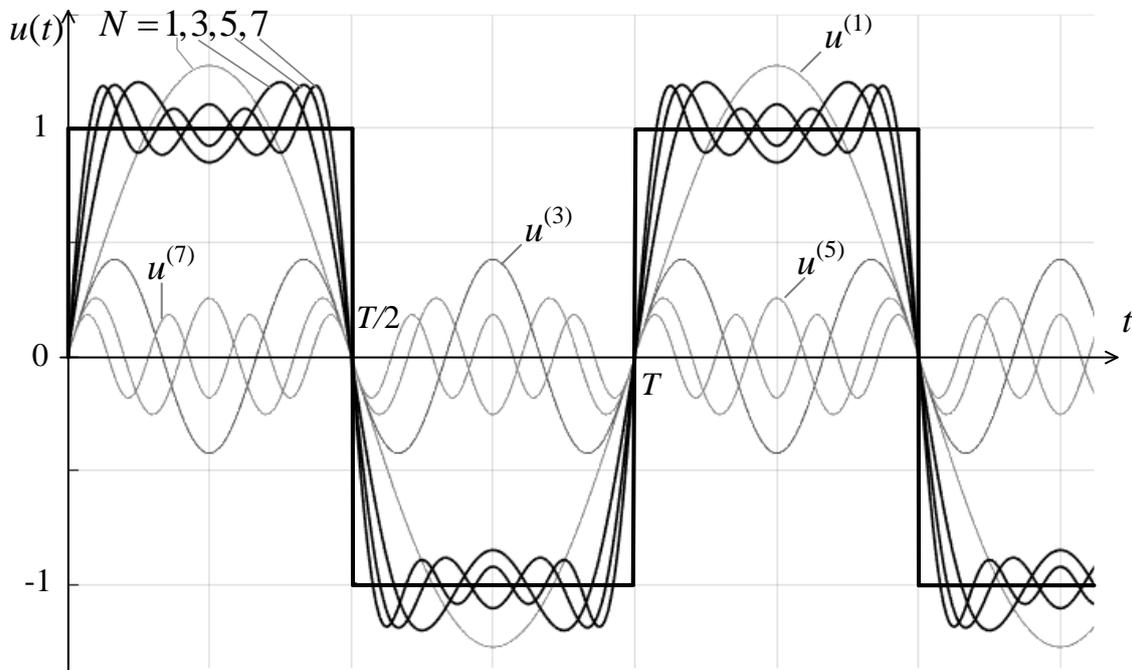


Рис. 2. Аппроксимации меандра суммой гармоник

В основе расчета линейной цепи несинусоидального тока лежит принцип наложения. Составляются чисто резистивная расчетная схема для постоянной составляющей и комплексная расчетная схема k -й гармоники с учетом того, что индуктивные и емкостные сопротивления зависят от частоты:

$$X_L^{(k)} = k\omega L = kX_L^{(1)}, \quad X_C^{(k)} = \frac{1}{k\omega C} = \frac{X_C^{(1)}}{k}.$$

Для аналитического расчета необходимо определить, какое число гармонических составляющих будет учитываться. Как правило, число членов ряда выбирается так, чтобы была достигнута требуемая точность при расчете действующего значения несинусоидального напряжения (тока). Действующее значение периодического несинусоидального напряжения определяется как среднеквадратичное за период:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}.$$

Предполагается, что при проведении эксперимента прибор измеряет действующее значение². При использовании ряда Фурье действующее значение напряжения вычисляется по постоянной составляющей и действующим значениям учитываемых N гармоник, обеспечивающих требуемую точность расчета:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_N^2} = \sqrt{U_0^2 + \sum_{k=1}^N U_k^2},$$

где $U_k = \frac{U_{km}}{\sqrt{2}}$ – действующее значение k -й гармоники³.

Расчет первой и высших гармоник удобно проводить комплексным методом. При этом его результат обязательно переводится в вещественную (временную) область, так как суммировать гармоники и постоянную составляющую можно только в этой области. При использовании гармонических составляющих мгновенные значения несинусоидальных напряжений или токов определяются суммой мгновенных значений всех составляющих, найденных при рассмотрении постоянной составляющей и каждой гармоники в отдельности.

Активная мощность равна сумме активных мощностей, рассчитанных на постоянной и гармонических составляющих:

$$P = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_0 I_0 \cos \varphi_k,$$

где $\varphi_k = \varphi_{ku} - \varphi_{ki}$ – угол сдвига фаз напряжения и тока k -й гармоники.

При использовании ряда Фурье активная мощность вычисляется по постоянной составляющей и действующим значениям учитываемых N гармоник. В работе предлагается для проведения аналитических расчетов ограничиться учетом трех членов ряда Фурье.

Основные величины, определяющие режим в цепи, наряду с рассмотрением отдельных гармоник, могут быть вычислены приближенно по дискретным значениям несинусоидального напряжения (тока). Так, при рассмотрении периодического напряжения произвольной формы, период T разбивается на M равных интервалов ($\Delta t = \frac{T}{M}$). **В данной работе рекомендуется принять $M = 16$.** Точки в начале каждого интервала,

² При использовании конкретного измерительного прибора необходимо разобраться в особенностях его показаний. В зависимости от исполнения прибора (вольтметра или амперметра) и устройства его входного преобразователя он может показывать действующее значение измеряемой величины, ее среднее по модулю значение, усредненное за период значение и т.д.

³ Действующее значение k -й гармоники и ее амплитуда часто обозначаются как $U^{(k)}$ и $U_m^{(k)}$ соответственно, а начальная фаза – $\varphi_u^{(k)}$

называемые узлами, определяют моменты времени $t_n = n\Delta t = \frac{nT}{M}$, $n = 0, 1, 2, \dots, (M - 1)$.

В таком случае:

1) постоянная составляющая, равная среднему значению, рассчитывается путем замены интеграла конечной суммой:

$$U_0 = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} u_n,$$

где $\sum_{n=0}^{M-1} u_n$ – сумма всех значений напряжения в узлах, $u_n = u(t_n)$, n – номер узла;

2) действующее значение напряжения может быть найдено как среднеквадратичное значение:

$$U = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} u_n^2};$$

3) активная мощность P может быть определена приближенно через дискретные значения несинусоидального напряжения и несинусоидального тока в узлах:

$$P = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} u_n i_n,$$

где $i_n = i(t_n)$.

На рисунке 3 показан пример подготовки осциллограммы (кривой) несинусоидального напряжения к расчету по дискретным значениям. При этом значение напряжения в узлах определяется с использованием масштабного коэффициента m_u .

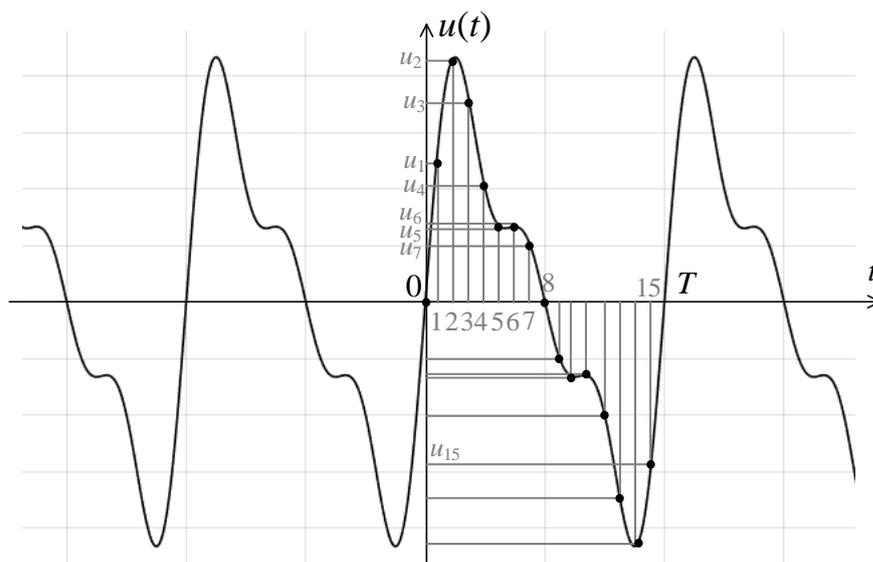


Рис. 3. Подготовка к расчету по дискретным значениям

4. ПОДГОТОВКА К РАБОТЕ

1. Входное напряжение $u(t)$ имеет вид меандра, симметричного относительно оси абсцисс и оси координат (см. рис. 1), $U_{\max} = 7$ В, период $T = 20$ мс.

1.1. Записать для заданного напряжения ряд Фурье, ограничиваясь четырьмя членами ряда (1, 3, 5, 7-я гармоники).

1.2. Определить действующее значение $U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$ заданного

несинусоидального напряжения. Рассчитать действующее значение напряжения, учитывая два, три и четыре члена ряда Фурье. Сравнить результаты расчета по точности определения действующего значения. Пояснить, почему в работе предлагается для проведения аналитических расчетов ограничиться учетом трех членов ряда Фурье.

1.3. Для схемы на рис. П1 при заданных параметрах R_k , L и C (см. таблицу исходных данных) рассчитать мгновенное значение тока $i(t)$, напряжения на конденсаторе $u_C(t)$ с учетом трех членов ряда Фурье для заданного входного напряжения. Рассчитать действующее значение тока и напряжения на конденсаторе. Проверить выполнение баланса активных мощностей для гармонических составляющих. Для всех бригад $R = 10$ Ом.

2. Построить на одном графике кривые мгновенных значений отдельных гармоник и их сумму (для тока и напряжения на конденсаторе).

3. Результаты аналитического расчета внести в таблицу 2П.

Таблица значений параметров элементов

№ бригады	L , мГн	R_k , Ом	C , мкФ
1	50	50	56
2	60	60	56
3	70	70	56
4	80	80	56
5	50	50	68
6	60	60	68
7	70	70	68
8	80	80	68
9	50	50	82
10	60	60	82
11	70	70	82
12	80	80	82

5. РАБОЧЕЕ ЗАДАНИЕ

Источником несинусоидального напряжения в форме знакопеременных импульсов является модуль **ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ГЕНЕРАТОР**. Этот модуль также позволяет получить необходимые синусоидальные напряжения соответствующих разложению в ряд Фурье гармоник.

Пассивные элементы электрической схемы выбирают из блоков **МОДУЛЬ РЕАКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**, **МОДУЛЬ РЕЗИСТОРОВ** и **МОДУЛЬ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ**. Активное сопротивление R_k катушки измеряют мультиметром. Измерения действующих значений входного напряжения $u(t)$ и тока $i(t)$, активной мощности P и сдвига фаз выполняют с помощью модуля **ИЗМЕРИТЕЛЬ ФАЗЫ**. Для измерения действующего значения напряжения на конденсаторе $u_C(t)$ служит мультиметр **PP** блока **МОДУЛЬ МУЛЬТИМЕТРОВ**. Для получения кривых тока и напряжения используют **ОСЦИЛЛОГРАФ**.

- Собрать электрическую цепь по схеме, приведенной на рис. 1П протокола измерений. Тумблер **SA2** модуля **ИЗМЕРИТЕЛЬ ФАЗЫ** установить в положение **I2**.
- Проверить собранную электрическую цепь в присутствии преподавателя.
- Установить в модуле **РЕАКТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ** заданные преподавателем величины индуктивности L катушки и емкости C конденсатора. Измерить мультиметром активное сопротивление R_k катушки. Записать эти значения в протокол измерений.

Опыт №1

- Включить автоматический выключатель **QF** блока **МОДУЛЬ ПИТАНИЯ**, тумблеры **Сеть** модуля **ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ГЕНЕРАТОР** и **SA1** блока **МОДУЛЬ ИЗМЕРИТЕЛЬ ФАЗЫ**. Переключатель **Форма** модуля **ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ГЕНЕРАТОР** установить в положение \square . Регулятором **Частота** установить частоту $f = 50$ Гц. Регулятором **Амплитуда** установить величину действующего значения напряжения $U = 7$ В.
- Включить **ОСЦИЛЛОГРАФ**. Настроить нулевое значение сигнала, повернуть ручку регулятора вертикальной развертки до упора по ходу часовой стрелки.
- Подключить **Вход 1** осциллографа к источнику. Настроить ручки горизонтальной развертки осциллографа таким образом, чтобы на экране полностью укладывался один период колебаний. Установить переключатель усиления по напряжению таким образом, чтобы максимально использовалась площадь экрана. Используя масштаб m_u на переключателе усиления по напряжению убедиться, что амплитуда входного напряжения составляет $U_{\max} = 7$ В. **В остальных опытах использовать указанный порядок настройки осциллографа.**

- Подключить **Вход 1** осциллографа к резистору R . Срисовать на кальку⁴ с экрана **ОСЦИЛЛОГРАФА** кривую зависимости $u_R(t)$. На рисунке указать масштаб m_u .
- Подключить **Вход 1** осциллографа к конденсатору C . Срисовать на кальку с экрана **ОСЦИЛЛОГРАФА** кривую зависимости $u_C(t)$. На рисунке указать масштаб m_u .
- Измерить приборами модуля **ИЗМЕРИТЕЛЬ ФАЗЫ** действующие значения напряжения входного напряжения u и тока i , активную мощность P . Вольтметром **РР** блока **МОДУЛЬ МУЛЬТИМЕТРОВ** измерить действующее значение напряжения на конденсаторе C . Измеренные значения занести в табл. 1П и табл. 2П протокола измерений.

Опыт №2

- Для проведения эксперимента с гармоническими составляющими занести в табл. 1П протокола измерений действующие значения трех гармонических составляющих входного напряжения:

$$U_1 = \frac{U_{1m}}{\sqrt{2}}, U_3 = \frac{U_{3m}}{\sqrt{2}} = \frac{U_1}{3}, U_5 = \frac{U_{5m}}{\sqrt{2}} = \frac{U_1}{5}.$$

- Переключатель **Форма** модуля **ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ГЕНЕРАТОР** установить в положение \sim .
- Регулятором **Частота** установить на выходе модуля **ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ГЕНЕРАТОР** частоту первой гармоники $f = 50$ Гц.. Регулятором **Амплитуда** установить величину действующего значения основной гармоники U_1 входного напряжения.
- Измерить приборами модуля **ИЗМЕРИТЕЛЬ ФАЗЫ** действующие значения напряжения u и тока i , активную мощность P первой гармонической составляющей. Вольтметром **РР** блока **МОДУЛЬ МУЛЬТИМЕТРОВ** измерить действующее значение первой гармоники напряжения на конденсаторе C . Измеренные значения занести в табл. 1П. **Указанный порядок измерений использовать в следующих опытах.**
- Регулятором **Частота** установить на выходе модуля **ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ГЕНЕРАТОР** частоту третьей гармоники $f = 150$ Гц. Регулятором **Амплитуда** установить величину действующего значения третьей гармоники U_3 входного напряжения.
- Выполнить измерения. Измеренные значения занести в табл. 1П.
- Регулятором **Частота** установить на выходе модуля **ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ГЕНЕРАТОР** частоту пятой гармоники $f = 250$ Гц. Регулятором **Амплитуда**

⁴ Допускается использование фотографического снимка с последующим переносом изображения на миллиметровую бумагу.

установить величину действующего значения пятой гармоники U_5 входного напряжения.

- Выполнить измерения. Измеренные значения занести в табл. 1П.
- Провести расчет действующего значения тока и напряжения на конденсаторе, активной мощности по гармоническим составляющим. Результаты расчета занести в табл. 2П.
- Прикрепить осциллограммы кривых входного напряжения, напряжения на резистивном и емкостном элементе, к протоколу наблюдений. На всех осциллограммах должны быть указаны масштабные коэффициенты, обозначены ось абсцисс и ось ординат.
 - **По указанию преподавателя.** Провести расчет действующего значения тока, напряжения на конденсаторе и активной мощности цепи по дискретным значениям. Результаты расчета занести в табл. 2П. Провести сравнение результатов измерений и расчета.
- Протокол измерений утвердить у преподавателя.
- Выключить тумблеры **Сеть** модуля **ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ГЕНЕРАТОР** и **SA1** блока **МОДУЛЬ ИЗМЕРИТЕЛЬ ФАЗЫ**. Выключить **ОСЦИЛЛОГРАФ**.
- Выключить автоматический выключатель **QF** блока **МОДУЛЬ ПИТАНИЯ**.

Опыт №3

- Собрать цепь с последовательно соединенными катушкой L_a из блока **МОДУЛЬ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ** и резистором $R = 10$ Ом.
- Включить автоматический выключатель **QF** блока **МОДУЛЬ ПИТАНИЯ**, тумблеры **Сеть** модуля **ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ГЕНЕРАТОР** и **SA1** блока **МОДУЛЬ ИЗМЕРИТЕЛЬ ФАЗЫ**. Переключатель **Форма** модуля **ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ГЕНЕРАТОР** установить в положение \square . Регулятором **Частота** установить частоту $f = 250$ Гц. Регулятором **Амплитуда** установить величину действующего значения напряжения $U = 7$ В.
- Включить **ОСЦИЛЛОГРАФ**. Настроить нулевое значение сигнала, повернуть ручку регулятора вертикальной развертки до упора по ходу часовой стрелки.
- Подключить **Вход 1** осциллографа к источнику. Настроить ручки горизонтальной развертки осциллографа таким образом, чтобы на экране полностью укладывался один период колебаний. Установить переключатель усиления по напряжению таким образом, чтобы максимально использовалась площадь экрана. Используя масштаб m_u на переключателе усиления по напряжению убедиться, что амплитуда входного напряжения составляет $U_{\max} = 7$ В. **В остальных опытах использовать указанный порядок настройки осциллографа.** Срисовать на кальку⁵ с экрана **ОСЦИЛЛОГРАФА** кривую входного напряжения $u(t)$.

⁵ Допускается использование фотографического снимка с последующим переносом изображения на миллиметровую бумагу.

- Подключить **Вход 1** осциллографа к резистору R . Срисовать на кальку с экрана **ОСЦИЛЛОГРАФА** кривую напряжения $u_R(t)$. На рисунке указать масштаб m_u .
- Прикрепить осциллограммы кривых входного напряжения, напряжения на резистивном элементе, к протоколу наблюдений. На всех осциллограммах должны быть указаны масштабные коэффициенты, обозначены ось абсцисс и ось ординат.
- Провести анализ полученных результатов, обосновать форму кривой напряжения на резисторе.

6. ПРОТОКОЛ ИЗМЕРЕНИЙ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 11

Схема исследуемой цепи показана на рис. 1П.

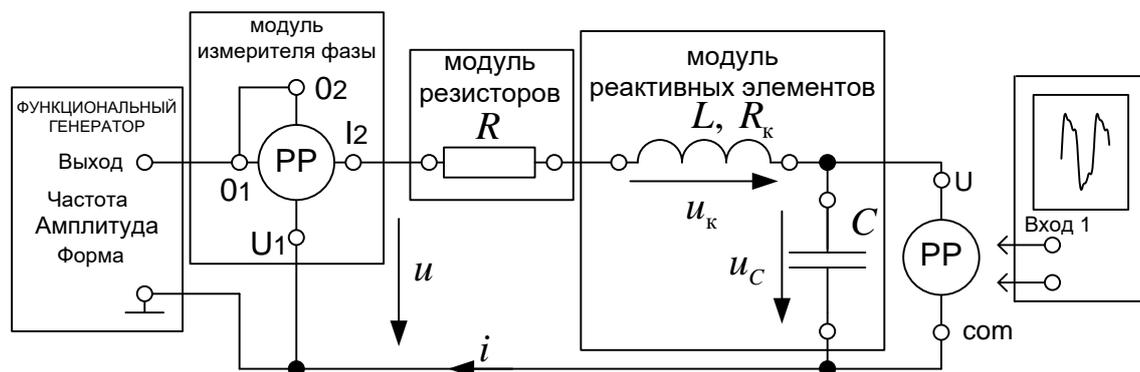


Рис. 1П

Параметры элементов цепи:

$C = \underline{\hspace{2cm}}$ мкФ, $L = \underline{\hspace{2cm}}$ мГн, $R_k = \underline{\hspace{2cm}}$ Ом, $R = 10$ Ом.

Максимальное значение несинусоидального напряжения $U_{\max} = 7$ В.

Таблица 1П

№ опыта	Теория		Эксперимент				
			U , В	I , мА	U_C , В	P , Вт	φ , град.
1	$U =$	Несинусоидальное напряжение $u(t)$					—
2	$U_1 =$	Синусоидальное напряжение $u^{(1)}(t)$					
2	$U_3 =$	Синусоидальное напряжение $u^{(3)}(t)$					
2	$U_5 =$	Синусоидальное напряжение $u^{(5)}(t)$					

Таблица 2П

	Действующее значение тока I , мА	Действующее значение напряжения на конденсаторе U_C , В	Активная мощность P , Вт
измерения			
расчет по гармоническим составляющим (подготовка к работе)			
расчет по гармоническим составляющим (эксперимент №2)			
расчет по дискретным значениям (по указанию преподавателя)			

Мгновенное значение тока с учетом трех гармонических составляющих (теория, подготовка к работе)

Мгновенное значение тока с учетом трех гармонических составляющих (эксперимент)

Мгновенное значение напряжения на конденсаторе с учетом трех гармонических составляющих (теория, подготовка к работе)

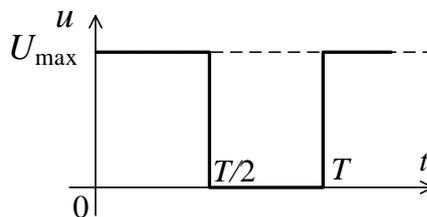
Мгновенное значение напряжения на конденсаторе с учетом трех гармонических составляющих (эксперимент)

7. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Заполнить таблицы 1П и 2П протокола измерений. Сравнить результаты эксперимента с расчетными данными из подготовки к работе.
2. Сопоставить экспериментально полученные формы кривых тока и напряжения на конденсаторе (осциллограммы) с построенными при выполнении подготовки к работе. Сделать вывод.
3. Сопоставляя по форме кривые напряжения на резисторе и входного напряжения опыта №3 объяснить связь их мгновенных значений.
4. **По указанию преподавателя.** Вычислить действующее значение несинусоидального тока в катушке (опыт №3) по дискретным значениям. Сравнить полученное значение с результатом расчета, используя разложение в ряд Фурье.

8. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Записать уравнение по второму закону Кирхгофа для цепи, схема которой представлена на рис.1П. Как определить аналитически $i(t)$ при заданной форме входного напряжения и параметрах элементов цепи? Сопоставить по форме кривые напряжения на резисторе и напряжения на конденсаторе (осциллограммы опыта №1). Как определить положение оси ординат для этих кривых в соответствии с заданным началом отсчета для входного напряжения?
2. Записать аналитическое выражение разложения в ряд Фурье напряжения в форме меандра, при условии, что кривая (см. рис.1) сдвинута относительно начала координат на: а) $T/4$ вправо; б) $T/2$ влево. Изменятся ли при этом амплитуды и начальные фазы гармонических составляющих?
3. Записать аналитическое выражение разложения в ряд Фурье для напряжения в форме однополярных импульсов (см. рисунок). Определить постоянную составляющую и действующее значение напряжения.



4. Как изменятся кривые мгновенных значений несинусоидального тока и напряжения на конденсаторе, если напряжение на входе будет иметь форму однополярных импульсов?
5. Как изменятся действующие значения несинусоидального тока и напряжения на конденсаторе, если напряжение на входе будет иметь форму однополярных импульсов?